~~$f_1(x)$ равно~~

Задачи по курсу "Вероятностные модели"

1. Доказать, что $\mathsf{E}|\xi - a| \geq \mathsf{E}|\xi - \mathrm{med}\xi|$ для любого $a \in \mathbb{R}$ и любой случайной величины ξ с конечным математическим ожиданием.

2. Пусть R_ξ – интерквартильный размах случайной величины ξ с конечным вторым моментом, $\mathsf{D}\xi = \sigma^2$. Доказать, что $R_\xi \leq 4\sigma$.

3. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – случайные величины. Доказать, что $\xi_n \xrightarrow{P} 0$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\frac{\xi_n^2}{1+\xi_n^2} = 0.$$

4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие распределение Коши. Доказать, что

$f_{\xi_1}(t) = e^{-|t|}$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_j \stackrel{d}{=} \xi_1$$

при любом $n \geq 1$.

5. Доказать, что из условия Линдеберга вытекает условие предельной малости.

6. Доказать, что из условия Ляпунова выткает условие Линдеберга.

7. Доказать, что сходимость функций распределения в центральной предельной теореме равномерна.

8. Пусть $\Phi(x)$ – стандартная нормальная функция распределения, $\phi(x)$ – соответствующая ей плотность. Доказать неравенства

$$\phi(x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \leq 1 - \Phi(x) \leq \frac{\phi(x)}{x}, \quad x > 0.$$

9. Какова скорость сходимости в теореме Муавра–Лапласа? Уточнить

208-209

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21									

10. Пусть ξ_λ – случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Доказать, что

$$\frac{\xi_\lambda}{\lambda} \xrightarrow{P} 1$$

при $\lambda \to \infty$.

11. Пусть ξ_λ – случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Доказать, что

$$\mathsf{P}\Big(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < x\Big) \longrightarrow \Phi(x)$$

при $\lambda \to \infty$.

12. Пусть ξ_a – случайная величина, имеющая геометрическое распределение с математическим ожиданием, равным a. Доказать, что

$$\lim_{a\to\infty} \mathsf{P}(a^{-1}\xi_a < x) = 1 - e^{-x}, \quad x > 0.$$

$\Rightarrow P\left[\frac{q}{p}X\right] = \infty$ $\quad q \to 1,\ p \to 0$

13. Что больше: неопределенность распределения случайной величины, принимающей значения 0 и 1 с равными вероятностями, или неопределенность распределения случайной величины, принимающей значения -1, 0 и 1 с вероятностями 0.25, 0.5 и 0.25, соответственно?

14. Для любой ли абсолютно непрерывной случайной величины существует дифференциальная энтропия?

15. Что больше: дифференциальная энтропия распределения, равномерного на $[0, 1]$, или дифференциальная энтропия показательного распределения с параметром $\lambda = 2$?

16. Вычислить дифференциальную энтропию нормального распределения с параметрами $a \in \mathbb{R}$ и $\sigma^2 > 0$.

17. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathsf{E}\xi_1 = a$ и $\mathsf{D}\xi_1 = \sigma^2 < \infty$. Пусть N – целочисленная положительная случайная величина, независимая от последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$, и имеющая конечный второй момент. Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Выразить $\mathsf{D}S_N$ через моменты индекса и слагаемых.

18. Что больше: коэффициент эксцесса распределения Стьюдента с десятью степенями свободы или 3?

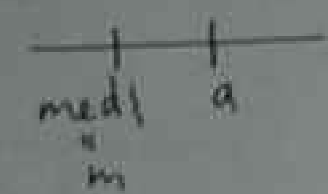
19. Пусть $N_1(t)$ – стандартный пуассоновский процесс (с интенсивностью 1). Пусть Λ – положительная случайная величина с конечным вторым моментом, независимая от $N_1(t)$. Выразить $\mathsf{D}N_1(\Lambda)$ через моменты случайной величины Λ.

20. Пусть $N_1(t)$ – стандартный пуассоновский процесс (с интенсивностью 1). Пусть Λ – положительная случайная величина, имеющая гамма-распределение с параметрами α и λ и независимая от $N_1(t)$. Найти распределение случайной величины $N_1(\Lambda)$.

21. Сколько респондентов надо опросить, чтобы определить рейтинг политического деятеля с точностью 0.1% и надежностью 0.95?

1) $\mathbb{E}|\xi - a| \geq \mathbb{E}|\xi - \operatorname{med}\xi| \quad \forall a \in \mathbb{R}$,
$\forall \xi$ с кон. мат. ожид.

$\square$

а) 

$$\mathbb{E}|\xi - a| = \int_{-\infty}^{+\infty} |x-a|\, dF_\xi(x) = \int_{-\infty}^{m} (a - x + m - m)\, dF_\xi(x) + \int_{m}^{a} (a - 2x + x - m + m)\, dF_\xi(x) +$$

$$+ \int_{a}^{+\infty} (x - a - m + m)\, dF_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x-m|\, dF_\xi(x) + \int_{-\infty}^{m} (a-m)\, dF_\xi(x) +$$

$$\int_{m}^{a} (-2x + a - a + a + m)\, dF_\xi(x) + \int_{a}^{+\infty} (m-a)\, dF_\xi(x) = \mathbb{E}|\xi - m| +$$

$$+ 2\int_{m}^{a} (a-x)\, dF_\xi(x) + (a-m)\left[\int_{-\infty}^{m} dF_\xi(x) - \int_{m}^{+\infty} dF_\xi(x)\right] = \mathbb{E}|\xi - m| +$$

$$+ 2\int_{m}^{a} (a-x)\, dF_\xi(x) + (a-m)\Big[\underset{\frac{1}{2}}{\underset{\shortparallel}{F_\xi(m)}} - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{F_\xi(-\infty)}} - \underset{1}{\underset{\shortparallel}{F_\xi(+\infty)}} + \underset{\frac{1}{2}}{\underset{\shortparallel}{F_\xi(m)}}\Big] =$$

$$= \mathbb{E}|\xi - m| + 2\underset{\geq 0}{\underbrace{\int_{m}^{a} (a-x)\, dF_\xi(x)}} \Rightarrow \mathbb{E}|\xi - a| \geq \mathbb{E}|\xi - \operatorname{med}\xi|$$

б) 

аналогично док-ва

$\blacksquare$

R_ξ – интерквартильный размах сл.в ξ с конеч. вторым моментом, $\mathbb{D}\xi = \sigma^2$. Док-ть $R_\xi \le 4\sigma$.

$\square$ $R_\xi = \ell(3/4) - \ell(1/4)$

$\mathbb{P}(\xi \le \ell(q)) \ge q$

$\mathbb{P}(\xi \ge \ell(q)) \ge 1-q$

Рассмотрим нер-во Чебышева.

$$P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{\mathbb{D}\xi}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

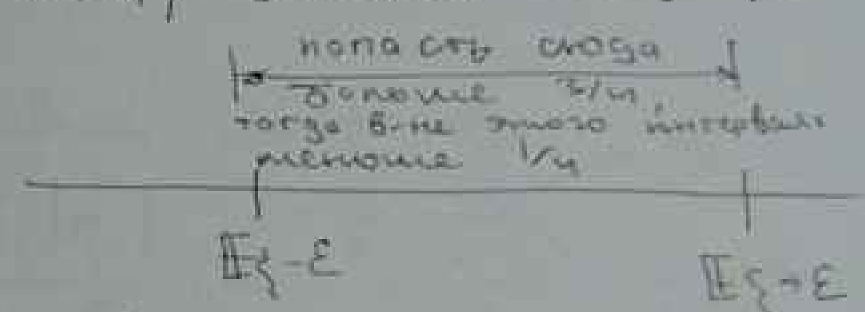
Выберем ε т.ч. $\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow P(\mathbb{E}\xi - \varepsilon \le \xi \le \mathbb{E}\xi + \varepsilon) \ge 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\varepsilon = 2\sigma$

$2\varepsilon = 4\sigma$

длина интервала 2ε и равна 4σ.

Покажем, что $\ell(1/4)$ и $\ell(3/4)$ лежат внутри этого интервала.



- $P(\xi < \mathbb{E}\xi - \varepsilon) < 1 - 3/4 = \frac{1}{4} \Rightarrow$

  если $\ell(1/4) < \mathbb{E}\xi - \varepsilon$, то $P(\xi \le \ell(\frac{1}{4})) \le \frac{1}{4}$, но по опред квартили $\ell(\frac{1}{4})$:

  $P(\xi \le \ell(\frac{1}{4})) \ge \frac{1}{4}$ (?!)

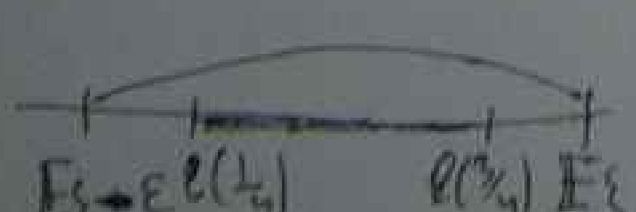
$\Longrightarrow \ell(1/4) \ge \mathbb{E}\xi - \varepsilon$

- ~~Или~~ $P(\xi > \mathbb{E}\xi + \varepsilon) < 1 - 3/4 = 1/4 \Rightarrow$

  если $\ell(3/4) > \mathbb{E}\xi + \varepsilon$, то $P(\xi \ge \ell(3/4)) \le \frac{1}{4}$, но по опред квартили $\ell(3/4)$:

  $P(\xi \ge \ell(3/4)) \ge \frac{1}{4}$ (?!)

$\Longrightarrow \ell(3/4) \le \mathbb{E}\xi + \varepsilon$

$\Longrightarrow$ 

$\Longrightarrow 2\varepsilon = 4\sigma \ge \ell(3/4) - \ell(1/4) = R_\xi$

$$\boxed{4\sigma \ge R_\xi}$$

$\blacksquare$

(3) $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — случ. величины. Док-ть

$$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{D} 0 \iff \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\frac{\xi_n^2}{1+\xi_n^2} = 0$$

($\Rightarrow$) $\xi_n \xrightarrow{D} \underset{\xi}{0} \Rightarrow \xi_n \Longrightarrow 0 : \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\varphi(\xi_n) = \mathbb{E}\varphi(\xi)$

$\forall \varphi$ непр и огр. $\exists\ \varphi = \frac{x^2}{1+x^2} \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\frac{\xi_n^2}{1+\xi_n^2} = \mathbb{E}\frac{0^2}{1+0^2} = \mathbb{E}\,0 = 0$$

($\Leftarrow$) $\eta_n = \frac{\xi_n^2}{1+\xi_n^2}$

Воспользуемся неравенством Маркова

$$P(|\eta_n| > \varepsilon) \le \frac{\mathbb{E}|\eta_n|}{\varepsilon} = \frac{\mathbb{E}\frac{\xi_n^2}{1+\xi_n^2} \to 0}{\varepsilon_{\text{конст}}} \longrightarrow 0$$

$\parallel$

$$P\left(\frac{\xi_n^2}{1+\xi_n^2} > \varepsilon\right) = P\left(\xi_n^2 > (1+\xi_n^2)\varepsilon\right) = P\left(\xi_n^2(1-\varepsilon) > \varepsilon\right) =$$

$$= P\left(\xi_n^2 > \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) = P\left(|\xi_n| > \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}}_{\exists \text{ равно } \tau}\right) = P(|\xi_n| > \tau)$$

$$\Rightarrow P(|\xi_n| > \tau) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 \quad \forall \tau > 0$$

4) $\xi_1, \xi_2, \dots$ — н.о.р.с.в, имеющие распр Коши.

Док-ть, что $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_j \overset{d}{=} \xi_1$

$\square$ $f_{\xi_1}(t) = e^{-|t|}$

$S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j$

$$f_{\frac{S_n}{n}}(t) = \mathbb{E}\, e^{it\frac{S_n}{n}} = \mathbb{E}\, e^{i\frac{t}{n}(\xi_1+\dots+\xi_n)} = \left(f\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n =$$

$$= \left(e^{-\frac{|t|}{n}}\right)^n = e^{-|t|} = f_{\xi_1}(t) = e^{-|t|} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ распред $\frac{S_n}{n}$ и ξ_1 также равны $\blacksquare$

(5) Из усл. Линдеберга следует усл. пред. малости.

Усл. Линдеберга: $\forall \varepsilon > 0 \ \frac{1}{B_n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{|x-a_i|>\varepsilon B_n} (x-a_i)^2 \, dF_i(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Усл. пред. малости: $\forall \varepsilon > 0 \ \max \mathbb{P}(|X_i - a_i| > \varepsilon B_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\square$

$$\mathbb{P}(|X_i - a_i| > \varepsilon B_n) = \int\limits_{|x-a_i|>\varepsilon B_n} dF_i(x) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 B_n^2} \int\limits_{|x-a_i|>\varepsilon B_n} (x-a_i)^2 \, dF_i(x)$$

$$\Rightarrow \max_{1\leq i\leq n} \mathbb{P}(|X_i - a_i| > \varepsilon B_n) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 B_n^2} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{|x-a_i|>\varepsilon B_n} (x-a_i)^2 \, dF_i(x) \to 0$$

$$\Rightarrow \max_{1\leq i\leq n} \mathbb{P}(|X_i - a_i| > \varepsilon B_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$\blacksquare$

з) Док-ть, что из условия Ляпунова следует условие Линдеберга.

□ $$\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{|x-a_i|>\varepsilon B_n}(x-a_i)^2\,dF_i(x) = \frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{|x-a_i|>\varepsilon B_n}\frac{|x-a_i|^3}{|x-a_i|}\,dF_i(x) \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon B_n^3}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{|x-a_i|>\varepsilon B_n}|x-a_i|^3\,dF_i(x) \le \frac{1}{\varepsilon B_n^3}\sum\int_{-\infty}^{+\infty}|x-a_i|^3\,dF_i(x) =$$

$$= \Big/\ \mu_i^3 = E|X_i-a_i|^3,\quad M_n^3 = \mu_1^3+\ldots+\mu_n^3\ \Big/ =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{M_n^3}{B_n^3}\xrightarrow[n\to\infty]{\text{по усл. Ляпунова}} 0$$, т.е. усл. Линдеберга выполнено

■

Док-ть, что сх-ть ф-ций распред. в ЦПТ равномерная.

ЦПТ: $\underbrace{P\left(\frac{\sum X_i - na}{\sqrt{n}\,\sigma} < x\right)}_{F_n(x)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underbrace{\Phi(x)}_{F(x)}$

[Опр. $f_n(x)$ равном. сх-ся к $f(x)$ при $n\to\infty$ на мн-ве X, если $\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n \geq N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.]

(1) 

$\forall \varepsilon > 0$ выберем $m > \frac{1}{\varepsilon}$. В силу непр. ф-ции распред. $\exists x_1, \dots, x_{m-1}$:

$F(x_i) = i/m$ $\quad \varepsilon > \frac{1}{m}$ и $|F_n(x_i) - F(x_i)| < \varepsilon$.

и это выполнено для x_i начиная с N_i.

в силу непр. в т. x_i

Тогда возьмем $\max N_i = N \Rightarrow |F_n(x_i) - F(x_i)| < \varepsilon\ \forall x_i\ \forall n > N$

$F(x_i) - \varepsilon \leq F_n(x_i) \leq F(x_i) + \varepsilon$

$\forall x\ \exists k: x_k \leq x \leq x_{k+1}$:

$F_n(x) - F(x) \underset{\substack{\text{в силу}\\ \text{монот.}\\ \text{ф распр.}}}{\leq} F_n(x_{k+1}) - F(x_k) \leq \underbrace{F(x_{k+1}) - F(x_k)}_{=1/m} + \varepsilon = \varepsilon + \frac{1}{m} \leq 2\varepsilon$

$F(x) - F_n(x) \leq F(x_{k+1}) - F_n(x_k) \leq \underbrace{F(x_{k+1}) - F(x_k)}_{1/m} + \varepsilon = \varepsilon + \frac{1}{m} \leq 2\varepsilon$

~~так мы док-ли равномерную сх~~

$\Rightarrow |F_n(x) - F(x)| \leq 2\varepsilon$, т.е. мы доказали для отрезка.

(2) $\forall x < x_1$

$|F_n(x) - F(x)| \leq F_n(x_1) - \overset{=0}{F(-\infty)} \leq \underset{= \frac{1}{m}}{F(x_1)} + \varepsilon \leq 2\varepsilon$

$F(x) - F_n(x) \leq F(x_1) - \overset{=0}{F_n(-\infty)} \leq \frac{1}{m} \leq 2\varepsilon$

$|F_n(x) - F(x)| \leq 2\varepsilon$

③] $x > x_{m-1}$

$$F_n(x) - F(x) \le \overset{1}{\overset{\shortparallel}{F_n(+\infty)}} - \overset{\frac{m-1}{m}}{\overset{\shortparallel}{F(x_{m-1})}} = \frac{1}{m} < \varepsilon$$

$$F(x) - F_n(x) \le F_n(+\infty) - F_n(x_{m-1}) \le \underset{1 - \frac{m-1}{m}}{\underset{\shortparallel}{1 - F(x_{m-1})}} + \varepsilon =$$

$$= \frac{1}{m} + \varepsilon \le 2\varepsilon$$

$\Rightarrow |F_n(x) - F(x)| \le 2\varepsilon$

Т.о. $\forall x \ \forall \varepsilon \ \exists N : |F_n(x) - F(x)| < 2\varepsilon$

что и доказывает равномерную сходимость

③] $\Phi(x)$ – станд. норм. ф-я распределения,
$\varphi(x)$ – соот-ая плотность

<u>Док-ть</u> $\varphi(x)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right) \underset{(2)}{\le} 1-\Phi(x) \underset{(1)}{\le} \frac{\varphi(x)}{x}, \; x>0$

1) □ $\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{x}}_{F(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \underbrace{e^{-\frac{y^2}{2}} \left\{1+\frac{1}{y^2}\right\}}_{f(x)} dy \quad (*)$

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left\{-\frac{2x}{2}\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right\} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left\{1+\frac{1}{x^2}\right\} = -f(x)$$

$$\int_x^\infty F'(y)\,dy = \int_x^\infty -f(y)\,dy \Rightarrow -F(x) = -\int_x^\infty f(y)\,dy$$

$\Rightarrow$ (*) верно.

$$\Rightarrow 1-\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} \left\{1+\frac{1}{y^2}\right\} dy = \frac{\varphi(x)}{x} \; ■$$

2) □ $\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right\}}_{F(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \underbrace{e^{-\frac{y^2}{2}} \left\{1-\frac{3}{y^4}\right\}}_{f(x)} dy$

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left\{-\frac{2x}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right) - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (**)$$

$$\cdot \left\{-1 + \cancel{\frac{1}{x^2}} - \cancel{\frac{1}{x^2}} + \frac{3}{x^4}\right\} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 - \frac{3}{x^4}\right) = -f(x)$$

$$\int_x^\infty F'(y)\,dy \int_x^\infty -f(y)\,dy = -F(x) = -\int_x^\infty f(y)\,dy \Rightarrow (**) \text{ верно}$$

$$\varphi(x)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} \left\{1-\frac{3}{y^4}\right\} \le 1-\Phi(x). \; ■$$

$\Rightarrow$ двойное нер-во доказано.

) Скорость сх-ти в теор Муавра-Лапласа

т. М-Л $\quad \underbrace{P\left(a \le \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\right)}_{F_n} \longrightarrow \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx}_{\Phi}$

Воспользуемся нер-ом Берри-Эссеена

$$\rho(F_n, \Phi) \le C L_n = C\frac{\mu^3}{\sqrt{n}\,\sigma^3}$$

$$\mu^3 = E|X_1 - EX_1|^3 \qquad \sigma^2 = DX_1$$

$$X_i = \begin{cases} 0, & 1-p \\ 1, & p \end{cases} \qquad EX_1 = p \qquad DX_1 = p - p^2 = p(1-p) = \sigma^2$$

$$|X_1 - EX_1| = \begin{cases} p, & 1-p \\ 1-p, & p \end{cases} \qquad E|X_1 - EX_1|^3 = p^3(1-p) + (1-p)^3 p =$$

$$= p(1-p)\left[p^2 + (1-p)^2\right] =$$

$$= p(1-p)\left[2p^2 + 1 - 2p\right] =$$

$$= p(1-p)\left[-2p(1-p) + 1\right]; \qquad \sigma^3 = (p(1-p))^{3/2}$$

$$\Rightarrow \rho(F_n, \Phi) \le \frac{C\,p(1-p)\left[1 - 2p(1-p)\right]}{\sqrt{n}\,(p(1-p))^{3/2}} =$$

$$= \frac{C(1 - 2p(1-p))}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}} =$$

$$= \frac{C}{\sqrt{np(1-p)}} - \frac{2C\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

10) ξ_λ - сл. в $\sim Pois(\lambda)$

Док-ть $\frac{\xi_\lambda}{\lambda} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{P} 1 \iff P\left(\left|\frac{\xi_\lambda}{\lambda}-1\right|>\varepsilon\right)\to 0$ $\forall\varepsilon$

$\square$ $\mathbb{E}\xi_\lambda = \lambda$; $\mathbb{D}\xi_\lambda = \lambda$

$\mathbb{E}\frac{\xi_\lambda}{\lambda} = 1$; $\mathbb{D}\frac{\xi_\lambda}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$

нер-во Чебышева

$$P\left(\left|\frac{\xi_\lambda}{\lambda}-1\right|>\varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{\xi_\lambda}{\lambda}-\overbrace{\mathbb{E}\frac{\xi_\lambda}{\lambda}}^{=1}\right|>\varepsilon\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2\lambda} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0$$

(11) Пусть ξ_λ — сл. в., имеющая распред Пуассона с парам $\lambda > 0$. Док-ть, что

$$P\left(\underbrace{\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}}_{\xi_\lambda^*} < x\right) \to \Phi(x)$$

при $\lambda \to \infty$.

□ $P(\xi_\lambda^* < x) \to \Phi(x) \to \underset{\text{хар. ф-я } \xi_\lambda^*}{f_{\xi_\lambda^*}} \to \underset{\text{хар. ф-я станд. норм. расп.}}{f(t)}$

$f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$; $f_{\xi_\lambda^*} \to e^{-t^2/2}$

$$f_{\xi_\lambda}(t) = \mathbb{E}\, e^{it\xi_\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

$$\Rightarrow f_{\xi_\lambda^*}(t) = \mathbb{E}\, e^{it\xi_\lambda^*} = \sum e^{it\frac{k-\lambda}{\sqrt{\lambda}}} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-it\sqrt{\lambda}} \sum e^{it\frac{k}{\sqrt{\lambda}}} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= e^{-it\sqrt{\lambda}-\lambda} \cancel{\sum \left(e^{\frac{it}{\sqrt{\lambda}}} \frac{\lambda}{k!}\right)^k} = e^{-it\sqrt{\lambda}} e^{-\lambda} \frac{\left(e^{\frac{it}{\sqrt{\lambda}}}\lambda\right)^k}{k!} =$$

$$= e^{-it\sqrt{\lambda} - \lambda} e^{e^{\frac{it}{\sqrt{\lambda}}}\lambda} = e^{-it\sqrt{\lambda} + \lambda\left(e^{\frac{it}{\sqrt{\lambda}}} - 1\right)}$$

$e^{is} = 1 + is + \frac{(is)^2}{2} + o(s^2)$, $s \to 0$, т.о. $s = t\lambda^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$$f_{\xi_\lambda^*}(t) = e^{\left(-it\sqrt{\lambda} + \lambda\left(it\lambda^{-\frac{1}{2}} + (it)^2 (2\lambda)^{-1} + o(t^2\lambda^{-1})\right)\right)} =$$

$$= e^{-\cancel{it\sqrt{\lambda}} + \cancel{it\sqrt{\lambda}} - t^2/2 + \cancelto{0}{o(t^2\lambda^{-1})}} \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} e^{-t^2/2}$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < x\right) \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} \Phi(x)$$

(12) ξ_a – св $\sim G(a)$, $E\xi_a = a = \frac{q}{p}$ (ξ_a - число неуспехов до 1-го успеха)

$\lim\limits_{a\to\infty} P\left(\frac{\xi_a}{a} < x\right) = 1 - e^{-x}, x>0$.

$q \to 1$, $p \to 0$

□ $P(\xi/a < x) = P(\xi < xa) = \sum\limits_{k=0}^{[\frac{q}{p}x]} p q^k =$

$p\sum\limits_{k=0}^{[\frac{q}{p}x]} q^k = p\frac{1-q^{[\frac{q}{p}x]}}{1-q} = \cancel{p}\frac{1-(1-p)^{[\frac{q}{p}x]}}{\cancel{p}} =$

$= 1-(1+(-p))^{-\frac{1}{p}\left(-p\left[\frac{q}{p}x\right]\right)} \Rightarrow$

$\lim\limits_{\substack{p\to 0 \\ q\to 1}} 1-(1+(-p))^{-\frac{1}{p}\left(-p\left[\frac{q}{p}x\right]\right)} = \left|\begin{array}{l}\text{испол втор.}\\ \text{замеч предел}\end{array}\right| =$

$= 1-e^{-x} \Rightarrow$

$\lim\limits_{a\to\infty} P(a^{-1}\xi < x) = 1-e^{-x}, x>0$.

см. другую сторону

$\xi_a \sim G(p)$, $\mathbb{E}\xi_a = a = \frac{q}{p}$ $\quad P(\xi = k) = p(1-p^k)$

$$f_{\xi_a}(t) = \mathbb{E}e^{it\xi_a} = \sum e^{itk} p(1-p)^k = p\,\frac{1}{1-qe^{it}}$$

$$f_{\frac{\xi_a}{a}}(t) = \frac{p}{1-qe^{it\frac{p}{q}}}$$

$$f_{\xi}(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \int_0^{\infty} e^{itx}e^{-x}dx = \int_0^{\infty} e^{x(it-1)}dx = \frac{1}{it-1}\cdot(-1) = \frac{1}{1-it}$$

$$\lim_{a\to\infty} f_{\frac{\xi_a}{a}} = \lim_{\substack{q\to 1\\ p\to 0}} f_{\frac{\xi_a}{a}} = \lim \frac{p}{1-q(\cancel{1+} e^{it\frac{p}{q}})} =$$

$$= \lim \frac{p}{1-q\left(1+it\frac{p}{q}+o\left(it\frac{p}{q}\right)\right)} = \lim \frac{p}{\underbrace{1-q}_{p} - itp - q\,\cancel{o(itp/q)}_{\to 0}}$$

$$= \lim \frac{\cancel{p}}{\cancel{p}(1-it) + \cancel{o\left(\frac{itp}{q}\right)}_{\to 0}} = \boxed{\frac{1}{1-it}}$$

$$o(\beta) = \overset{\text{Sum}}{\alpha(x)}\beta(x)$$

(3) $X_1 = \begin{cases} 0 \, ; \, 1/2 \\ 1 \, ; \, 1/2 \end{cases}$ $X_2 = \begin{cases} -1 \, , \, 1/4 \\ 0 \, , \, 1/2 \\ 1 \, , \, 1/4 \end{cases}$

$\rightarrow H(X_1) = -\sum_{n=1}^{2} p_n \log p_n = -\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\right) = -\log\frac{1}{2} =$

основание берем 2, чтобы получить 1-у информации

$= 1$

$H(X_2) = -\sum_{n=1}^{3} p_n \log p_n = -\left(\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\log\frac{1}{4}\right) =$

$= -\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\right) =$

$= -\frac{3}{2}\log\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Longrightarrow H(X_1) = 1 < \frac{3}{2} = H(X_2)$

(14) Для любой ли абсолютно непрер. случ. величины существует диф. энтропия?

Ответ: нет.

Контрпример: $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{x \ln^2 x} & , x \in [e, +\infty) \\ 0 & , x \notin [e, +\infty) \end{cases}$

$$H(X) = -\mathbb{E} \log p(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \log p(x)\, dx = \Big|\ \text{основ. log берем равным } e$$

$$= -\int_e^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} \cdot \ln \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx =$$

$$= \int_e^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} \left(\ln x + \ln \ln^2 x\right) dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = y \\ x = e^y \\ dx = e^y dy \end{array} \right|$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{1}{\cancel{e^y} y^2} \left(y + \ln y^2\right) \cdot \cancel{e^y}\, dy = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{y} + \frac{2 \ln y}{y^2}\right) dy$$

$$\cancel{\ln y \Big|_1^{\infty}} + 2\int_1^{\infty} \frac{\ln y}{y^2}\, dy = \left| \begin{array}{l} \ln y = z \\ y = e^z \\ dy = e^z dz \end{array} \right| =$$

$$= \infty + 2\int_0^{\infty} \frac{z}{e^{2z}} e^z\, dz = \infty + 2\int_0^{\infty} z e^{-z} dx$$

$$= \infty - \cancel{2 z e^{-z} \Big|_0^{\infty}} + \cancel{\ldots} - 2e^{-z} \Big|_0^{\infty} = \infty + 2 = \infty$$

$\Rightarrow$ диф. энтропии нет

15) X_1 с равном распред на $[0,1]$
X_2 с показ. распред с $\lambda = 2$

① $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$

$$H(X_1) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\log p(x)\,dx = -\frac{1}{b-a}\log\frac{1}{b-a}\, x\Big|_a^b = \log(b-a)$$

② $p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \in [0,+\infty) \\ 0, & x \notin [0,+\infty) \end{cases}$

$$H(X_2) = -\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \log(\lambda e^{-\lambda x})\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{берем основание} \\ \log \text{ равном } e \end{array} \right|$$

$$= -\ln\lambda \underbrace{\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx}_{=1} + \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{\lambda} e^{-\lambda x} \cdot \lambda x\, d(\lambda x) = -\ln\lambda + \int_0^{+\infty} u e^{-u}\,du =$$

1 как интегр от плотн

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= -\ln\lambda - \cancel{ue^{-u}}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-u}\,du = -\ln\lambda - e^{-u}\Big|_0^{+\infty} = -\ln\lambda + 1$$

$\lambda = 2 \Rightarrow H(X_2) = 1 - \ln 2$

$b = 1,\ a = 0 \Rightarrow H(X_1) = \ln 1 = 0$

$$H(X_1) = 0 < 1 - \ln 2 = H(X_2)$$

Диф. энтропия показ с $\lambda = 2$ $\boxed{\text{больше}}$
равном с $b = 1$, $a = 0$

(16) Вычислить диф. энтропию нормального распределения с $a \in \mathbb{R}$ и $\sigma^2 > 0$.

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$H(X) = -\mathbb{E}\log p(x) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \log \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{основание } \log \\ \text{берем } e \end{matrix} \right| = +\log\sigma\sqrt{2\pi} \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx}_{1\text{, как интеграл от плотности}} +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log e}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} dx =$$

$$= +\log\sigma\sqrt{2\pi} + \frac{\log e}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2} \frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2 dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \frac{x-a}{\sigma} = z \\ dx = \sigma\, dz \end{matrix} \right| = \log\sigma\sqrt{2\pi} + \frac{\log e}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} z^2 dz$$

$$= \log\sigma\sqrt{2\pi} + \frac{\log e}{2\sqrt{2\pi}} \cdot (-1) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z\, d e^{-\frac{z^2}{2}} = \log\sigma\sqrt{2\pi} -$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cancel{z e^{-z^2/2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}} \to 0 + \frac{\log e}{2\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz}_{=\sqrt{2\pi}} =$$

$$= \log\sigma\sqrt{2\pi} + \frac{\log e}{2} = \log\sigma\sqrt{2\pi e}$$

17) $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – н.о.р.с.в., $\mathbb{E}\xi_1 = a$, $\mathbb{D}\xi_1 = \sigma^2 < \infty$

N – цел. пол. сл. в. [illegible] $\mathbb{E}N = \alpha$, $\mathbb{D}N = \beta$

Виразити $\mathbb{D}S_N$ через a, σ^2, α и β

$\square$ Док-ти, что $f_{S_N}(t) = \psi_N(f_{\xi_1}(t))$.

$$f_{S_N}(t) = \mathbb{E}e^{itS_N} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p_{S_N}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \sum_{n=1}^{\infty} p_{S_N}(x|N=n) \cdot P(N=n)\,dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \underset{\xi_1+\ldots+\xi_N}{p_{S_N}}(x | N = n)\,dx \right) P(N = n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f^n_{\xi_1}(x)\, P(N=n) = \psi_N(f_{\xi_1}(t)).$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}S_N = \frac{1}{i} \left.\frac{df_{S_N}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{i} \left.\frac{d\psi(f_{\xi_1}(t))}{dt}\right|_{t=0} =$$

$$= \frac{1}{i} \left.\frac{d\psi(f_{\xi_1}(t))}{df(t)} \cdot \frac{df_{\xi_1}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{i}\mathbb{E}N \cdot i\mathbb{E}\xi_1 = a\alpha$$

$$\mathbb{E}S_N^2 = -\left.\frac{d^2 f_{S_N}(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = -\frac{d}{dt}\left.\left(\frac{d\psi(f(t))}{df(t)} \cdot \frac{df(t)}{dt}\right)\right|_{t=0} =$$

$$= -\left.\frac{d^2\psi(f(t))}{d(f(t))^2} \cdot \left(\frac{df(t)}{dt}\right)^2\right|_{t=0} - \left.\frac{d\psi(f(t))}{df(t)} \cdot \frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right|_{t=0} =$$

$$= \mathbb{E}N(N-1)(\mathbb{E}\xi_1)^2 + \mathbb{E}N\,\mathbb{E}\xi_1^2 = \mathbb{E}N^2(\mathbb{E}\xi_1)^2 + \mathbb{E}N\,\mathbb{D}\xi_1$$

$$\mathbb{D}S_N = \mathbb{E}S_N^2 - (\mathbb{E}S_N)^2 = \mathbb{E}N^2(\mathbb{E}\xi_1)^2 - (\mathbb{E}N)^2(\mathbb{E}\xi_1)^2 + \mathbb{E}N\,\mathbb{D}\xi_1$$

$$= \mathbb{D}N(\mathbb{E}\xi_1)^2 + \mathbb{E}N\,\mathbb{D}X_1 = \beta a^2 + \alpha\sigma^2$$

(8) X имеет распред. Стьюдента с $n=10$

Сравнить коэф эксцесса X и 3

$$\gamma_4 = \frac{\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^4}{(\mathbb{D}X)^2} = \frac{\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^4}{(\mathbb{E}X^2-(\mathbb{E}X)^2)^2} \qquad f_X(x) = \boxed{\frac{\Gamma(\frac{11}{2})}{\sqrt{10\pi}\,\Gamma(5)}}\left(1+\frac{x^2}{10}\right)^{-\frac{11}{2}}$$

$$\mathbb{E}X = A\int_{-\infty}^{+\infty} x\left(1+\frac{x^2}{10}\right)^{-\frac{11}{2}}dx = \left| \begin{array}{l} \text{ф-я подинтегр} \\ \text{нечетная} \end{array} \right| = \boxed{0}$$

$$\mathbb{E}X^2 = A\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\left(1+\frac{x^2}{10}\right)^{-(5+\frac{1}{2})} = 10A\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{10}}\right)^2\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{10}}\right)^2\right)^{-(5+\frac{1}{2})}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \frac{x}{\sqrt{10}} = t \\ dx = \sqrt{10}\,dt \end{array} \right| = 10\cdot\sqrt{10}\cdot A\cdot 2\int_0^{+\infty} t^2\left(1+t^2\right)^{-(5+\frac{1}{2})}dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t^2 = z \\ 2t\,dt = dz \\ dt = \frac{dz}{2\sqrt{z}} \end{array} \right| = 10\cdot\sqrt{10}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot A\int_0^{+\infty} z^{\frac{1}{2}}(1+z)^{-(5+\frac{1}{2})}dz =$$

$$= 10\cdot\sqrt{10}\cdot A\cdot B\left(\frac{3}{2},4\right) = 10\cdot\sqrt{10}\cdot A\cdot\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{11}{2})} =$$

$$= 10\cdot\cancel{\sqrt{10}}\cdot\frac{\cancel{\Gamma(\frac{11}{2})}}{\cancel{\sqrt{10}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(5)}\cdot\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(4)}{\cancel{\Gamma(\frac{11}{2})}} = \frac{10\cdot\frac{1}{2}\cdot\cancel{\sqrt{\pi}}}{4\cancel{\sqrt{\pi}}} = \boxed{\frac{5}{4}}$$

$$\mathbb{E}X^4 = A\int_{-\infty}^{+\infty} x^4\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{10}}\right)^2\right)^{-(5+\frac{1}{2})}dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x}{\sqrt{10}} = t \\ dx = \sqrt{10}\,dt \end{array} \right| = A\cdot 100\cdot\sqrt{10}\cdot 2\cdot$$

$$\int_0^{+\infty} t^4\left(1+t^2\right)^{-(5+\frac{1}{2})}dt = \left| \begin{array}{l} t^2 = z \\ dt = \frac{dz}{2\sqrt{z}} \end{array} \right| =$$

$$= A\cdot 100\cdot\sqrt{10}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\int_0^{+\infty} z^2(1+z)^{-(5+\frac{1}{2})}\frac{dz}{\sqrt{z}} = 100\cdot\sqrt{10}\cdot A\int_0^{+\infty} z^{\frac{3}{2}}(1+z)^{-(5+\frac{1}{2})}dz$$

$$= 100\cdot\sqrt{10}\cdot A\,B\left(\frac{5}{2},3\right) = 100\cdot\cancel{\sqrt{10}}\,\frac{\cancel{\Gamma(\frac{11}{2})}}{\cancel{\sqrt{10}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(5)}\cdot\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\,\Gamma(3)}{\cancel{\Gamma(\frac{11}{2})}} =$$

4·3

$$= \frac{\overset{25}{\cancel{100}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{\sqrt{\pi}}}{4\cdot\cancel{3}\cancel{\sqrt{\pi}}} = \boxed{\frac{25}{4}}$$

$$\gamma_4 = \frac{\mathbb{E}(X-\underbrace{\mathbb{E}X}_{0})^4}{[\mathbb{E}X^2-(\underbrace{\mathbb{E}X}_{0})^2]^2} = \frac{\mathbb{E}X^4}{[\mathbb{E}X^2]^2} = \frac{25}{4}\cdot\frac{4^2}{5^2} = 4$$

$$4 > 3 \Rightarrow \boxed{\text{коэф эксцесса больше } 3}$$

] $N_1(t)$ – станд. пуас. процесс
] Λ – полож. сл. величина с конеч. вторым моментом, независимая от $N_1(t)$.
Выразить $D\underbrace{N_1(\Lambda)}_{N}$ через моменты случ. величины
Λ : $E\Lambda = a$, $D\Lambda = b$

распред Λ

$$EN = \sum_{k=0}^{\infty} k\, P(N=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\, dU(\lambda) =$$

$$= \int_0^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\right)}_{\|} dU(\lambda) = \int_0^{\infty} \lambda\, dU(\lambda) = E\Lambda$$

$$e^{-\lambda}\lambda \sum \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda$$

$$DN = EN^2 - (EN)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\, dU(\lambda) - (E\Lambda)^2 =$$

$$= \int_0^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\right)}_{} dU(\lambda) - (E\Lambda)^2 = \int_0^{\infty} (\lambda^2 + \lambda)\, dU(\lambda) - (E\Lambda)^2 =$$

$$\underbrace{\sum (k-1+1) \lambda^k / (k-1)!}_{}$$

$$\underbrace{e^{-\lambda}\lambda^2 \sum \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + e^{-\lambda}\lambda \sum \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{}$$

$$\lambda^2 \cancel{e^{-\lambda}} \cancel{e^{\lambda}} + \lambda \cancel{e^{-\lambda}} \cancel{e^{\lambda}}$$

$$= E\Lambda^2 + E\Lambda - (E\Lambda)^2 =$$

$$= D\Lambda + E\Lambda$$

$$\Rightarrow EN = a$$

$$DN = a + b.$$

Сколько респондентов надо опросить, чтобы определить рейтинг полит. деятеля с точностью 0.1% и надежностью 0.95?

$\varepsilon = 0.001$

$\gamma = 0.95$

$X_1, X_2, \ldots X_n$ – респонденты $\quad X_i = \begin{cases} 1, & \text{"за" с вер } p \\ 0, & \text{"против" с вер } 1-p \end{cases}$

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ – оценка рейтинга.

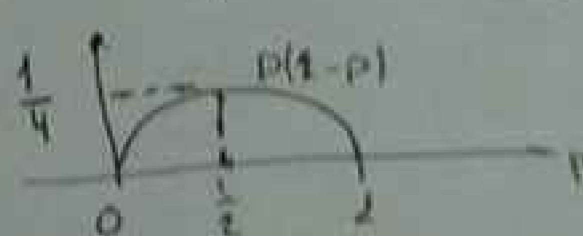
p – это сам рейтинг $\quad p \approx \overline{X}$ | по ЗБЧ частота сх-ся к вероятности

$MX_i = p;\ DX_i = p(1-p) \Rightarrow D\frac{\Sigma X}{n} = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$

$$P(|p - \overline{X}| \leq \varepsilon) \geq \gamma$$

$$P(|p - \overline{X}| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{D\overline{X}}{\varepsilon^2} = \underbrace{1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \geq \gamma}$$

$$\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq 1 - \gamma$$



$$\frac{1}{4n\varepsilon^2} \leq 1 - \gamma \Rightarrow n \geq \frac{1}{4\varepsilon^2(1-\gamma)} = \frac{1}{4\,10^{-6} \cdot 0.05} = \frac{10^7}{2}$$

$$= 5000.000$$

Надо опросить не менее 5000.000 респондентов